Agrupamento de Escolas Domingos Sequeira

EDIÇÃO 03 MAIO 2023

+MAT

Jornal de Matemática

Direção e Edição de:

Rosa Bértolo e Carla Nunes

Nesta Edição

História da Matemática- Arquimedes

Triângulo de Pascal e restos

Prémio Nobel da matemática?

Problemas em aberto

O infinito

Curiosidades

Desafios

A Estatística e o Ambiente

Notícias

Sugestões

Resoluções dos desafios da edição anterior

Colaboradores permanentes:
Adelaide Cosme, José Fonseca e Paula Freitas.

"Deem-me um ponto de apoio e moverei o mundo."
Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.)

Arquimedes é considerado um dos maiores cientistas da Antiguidade Clássica. Foi físico, matemático e inventor.
Vejamos algumas das suas principais invenções:

- **o Parafuso de Arquimedes - consiste num dispositivo em espiral para elevar água; é uma espécie de mola espiral, ajustada dentro de um cilindro, que, ao girar, faz com que a água vá subindo no cilindro.**
- **a pedido do rei, na iminência de uma batalha, criou várias máquinas para defesa da sua Pátria:**

1. **um sistema para mover uma monumental embarcação grega (trirreme) e lançá-la ao mar: a embarcação era movida por um sistema de roldanas de grande capacidade, que estavam ligadas à embarcação por meio de cabos;**
2. **um tentáculo mecânico, munido de pinças gigantescas que esfacelavam as embarcações mais próximas.**
3. **catapultas capazes de atirar rochas a longas distâncias atingindo as embarcações inimigas.**
4. **enormes espelhos côncavos feitos de metal polido que dirigiam os raios solares sobre as velas dos navios inimigos, ateando-lhes fogo.**

Em Siracusa, cidade grega onde vivia, o povo estava tão seguro de que as máquinas de Arquimedes defenderiam a cidade que ficaram alheios à ameaça romana. Mas não há bem que sempre dure...

Para saberes mais, consulta, por exemplo:
https://www.ebiografia.com/arquimedes/

+HISTÓRIA

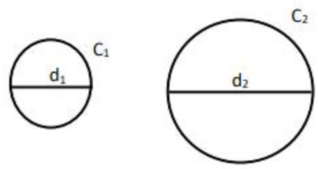
ARQUIMEDES (287 - 212 A. C.)

Quem foi Arquimedes?
Arquimedes nasceu em Siracusa, na Sicília, e foi notável em várias áreas do saber. Utilizando as suas próprias palavras numa carta a Eratóstenes, foi "um sábio zeloso, um filósofo distinto e um grande admirador das investigações matemáticas". Foi um dos nomes mais brilhantes na História das Matemáticas e, sem dúvida, o primeiro de toda a antiguidade. Muito novo, foi para Alexandria para seguir as lições de Euclides, tendo voltado mais tarde à sua cidade natal.
Dedicou toda a sua vida à investigação com o objetivo de fazer progredir as Matemáticas puras e aplicadas. As suas áreas de interesse foram muito variadas; da Geometria plana e sólida à Aritmética, da Mecânica à Hidrostática e à Astronomia, notabilizou-se em todas elas.

Acerca de Arquimedes físico e engenheiro, já demos conta na página 1 deste jornal, apresentando algumas das sua invenções.

Quanto a Arquimedes matemático, começamos por referir que os seus conhecimentos geométricos eram de facto admiráveis, para a época. Os seus trabalhos sobre determinações infinitesimais, com o emprego rigoroso do método da exaustão, abriram caminho ao trabalho de Leibniz e Newton permitindo-lhes fundar o Cálculo diferencial e integral no Séc. XVII.

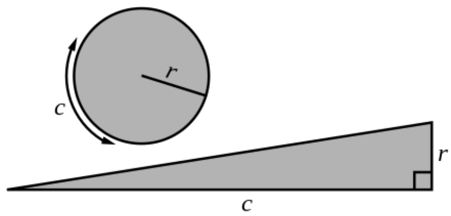
Arquimedes descobriu que, em todos os círculos, sejam grandes ou pequenos, o quociente entre o comprimento do seu perímetro e o do seu diâmetro é constante. **Esta constante universal de todos os círculos é o número pi.**
Como vimos na edição anterior, só muitos séculos mais tarde se viria a conhecer um "número razoável" de dígitos do pi. No entanto, Arquimedes usou-o com precisão, ao entendê-lo como uma razão constante!



$$\frac{C_1}{d_1} = \frac{C_2}{d_2} = \cdots = \pi$$

A obra mais conhecida de Arquimedes é " A Medida do círculo".
Em três teoremas, Arquimedes demonstra, por exaustão, que "a superfície do círculo é igual à superfície do triângulo retângulo cujos catetos são a periferia c e o raio r da circunferência do mesmo círculo".
De facto,

$$\pi \times r^2 = \frac{2\pi r \times r}{2}$$

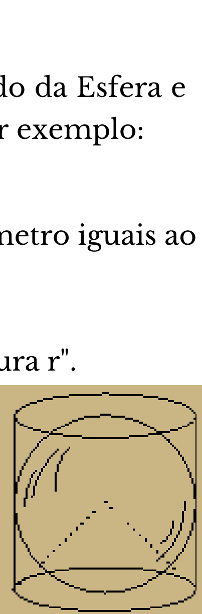


Constatamos, com espanto, que os cálculos feitos por Arquimedes pressupunham o conhecimento do cálculo de valores aproximados das raízes quadradas dos números e de senos de ângulos...

Mas, de todos os seus trabalhos, aquele que Arquimedes considerou o mais belo foi "O tratado da Esfera e do Cilindro". Nesta obra, descobriu e demonstrou vários resultados dignos de nota, como por exemplo:

- a área da esfera é igual à de quatro círculos máximos do mesmo diâmetro;
- a área da esfera é também igual a 2/3 da área do cilindro circunscrito (com altura e diâmetro iguais ao diâmetro da esfera);
- o volume da esfera é igual a 2/3 do volume do cilindro circunscrito;
- "o volume da esfera de raio r é 4 vezes o volume do cone com diâmetro da base 2r e altura r".

O seu fascínio pelas relações entre as superfícies e os volumes da esfera e do cilindro era tão grande que, a seu pedido, foi gravado no seu túmulo uma esfera inscrita num cilindro.

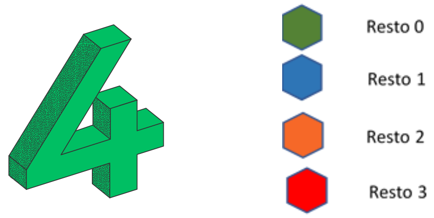


Para saberes mais, podes consultar o livro:
História das Matemáticas na Antiguidade, Vasconcellos, Fernando A. L, Ludus

TRIÂNGULO DE PASCAL E RESTOS

Na edição anterior, lançámos o desafio de pintares o triângulo de Pascal de acordo com os restos da divisão dos seus elementos por 4 e também por 5. Diz-se que se trata de uma divisão módulo 4 ou módulo 5, respetivamente.
Em cada um dos casos, o que te propusemos foi que escolhesses uma cor diferente para cada um dos restos. Mas poderíamos produzir alterações à regra. Por exemplo, poderias pintar o resto zero com uma cor e todos os outros com outra!
Vamos analisar agora os dois casos que foram propostos.

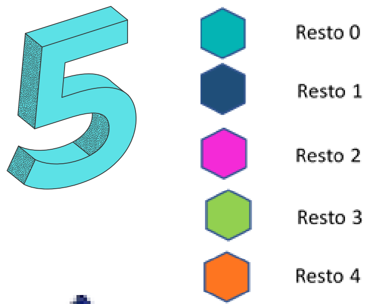
Triângulo de Pascal pintado com 4 cores



Nota que:

- a soma de dois números divisíveis por 4 é divisível por 4 (resto 0+ resto 0= resto 0);
- a soma de um número divisível por 4 com outro qualquer com resto k é um número com resto k. Assim, a cor verde é "neutra", isto é, o resultado terá a cor do outro número;
- por exemplo, a soma de dois números que tenham resto 3 dá um número cujo resto será 2 (3+ 3 = 6 -> 6 -4 = 2);
- etc.

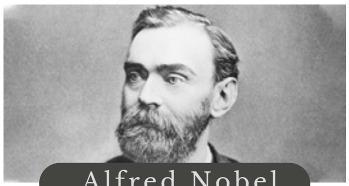
Triângulo de Pascal pintado com 5 cores



Nota que:

- a soma de dois números divisíveis por 5 é um número divisível por 5 (resto 0+ resto 0= resto 0);
- a soma de um número divisível por 5 com outro qualquer que dê resto k é um número com resto k. Assim, a cor azul turquesa é "neutra", isto é, o resultado terá a cor do outro número;
- a soma de dois números que tenham resto 3 dá um número cujo resto será 1 (3+ 3 = 6 -> 6 -5 = 1): verde com verde dá azul escuro;
- verde com laranja dá cor de rosa porque 3 + 4 = 7, logo o resto será 2 (7 - 5 = 2);
- etc.

ONDE ESTÁ O PRÉMIO NOBEL DA MATEMÁTICA?

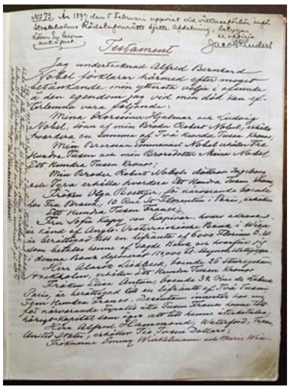


Alfred Nobel

E o Prémio Nobel da Matemática vai para…"

Quem pensa ter já ouvido este anúncio várias vezes está absolutamente equivocado.

Quando, em 1895, Alfred Nobel (1833-1896) assinou o seu último testamento, instituiu que uma grande parte da sua imensa fortuna se destinaria à atribuição de prémios a quem, "no ano precedente, tenha prestado um contributo valioso à humanidade".



Nobel especificou as áreas a distinguir com o prémio, de periodicidade anual, sendo o valor dividido em cinco partes iguais, cabendo três partes a quem fizesse a descoberta, desenvolvimento ou invenção mais relevante no campo da Física, no campo da Química e no campo da Fisiologia ou da Medicina; uma parte para a pessoa que, no campo da Literatura, produzisse a obra mais extraordinária e com um propósito idealista; e uma parte para a pessoa que mais tivesse contribuído para a aproximação entre nações, a redução de armamento e a promoção da paz. Estavam criados os Prémios Nobel da Física, da Química, da Medicina, da Literatura e da Paz [1].

A leitura do testamento causou generalizada polémica, a ponto de os primeiros prémios terem sido atribuídos apenas cinco anos mais tarde, em 1901. Mas suscitou sobretudo profunda consternação entre os académicos matemáticos, por verificarem que a sua área não era contemplada. É inegável que Nobel tinha um profundo interesse pelas áreas que elegeu. O que parece despertar estranheza é o facto de ter excluído a Matemática dos prémios. As razões para esta "omissão" permanecem até hoje desconhecidas, e as justificações avançadas são apenas deduções, resvalando até para o domínio da especulação.

Aquela que tem fomentado maior curiosidade junto do público respeita à hostilidade entre Nobel e o mais famoso matemático sueco da sua época, Magnus Gösta Mittag-Leffler, por alegadamente ter mantido uma relação amorosa com a amante de Nobel, a austríaca Sophie Hess. Ainda que entre os dois homens tenham ocorrido atritos, como afirmou posteriormente Mittag-Leffler, não é garantido que Mittag-Leffler tenha chegado a conhecer Sophie Hess.

Assim, a existir uma retaliação por parte de Nobel ao excluir a Matemática dos prémios, essa dever-se-ia a razões de ordem pessoal e/ou profissional e não a rivalidades amorosas. A hipótese sentimental afigura-se, portanto, pouco plausível, pelo que o enigma se mantém.

Sophie Hess

As razões para a não existência de um Prémio Nobel da Matemática poderão até ser mais simples do que se tem querido supor: talvez Alfred Nobel tenha desejado premiar invenções práticas, com impacto direto na vida das pessoas, e a Matemática afigurava-se-lhe demasiado teórica; talvez Alfred Nobel entendesse que a teorização matemática já estava contemplada nas descobertas das restantes ciências; talvez Nobel não tivesse um entusiasmo concreto pela Matemática, embora reconhecesse a sua aplicabilidade; talvez Nobel se tenha, simplesmente, esquecido de incluir a Matemática no seu testamento…

Niels H. Abel

O certo é que o mundo académico reconhece a importância e o estímulo intelectual que um prémio desta envergadura confere. Por isso, foi instituída em 1932 a Medalha Fields, que recompensa, de quatro em quatro anos, dois, três ou quatro matemáticos com idade inferior a 40 anos, e o Prémio Abel, em homenagem ao matemático norueguês Niels Henrik Abel, de frequência anual e estabelecido pelo governo da Noruega em 2002, no valor de 7,5 milhões de coroas norueguesas (cerca de 650 000 euros).

Como se vê, há cada vez mais razões para investirmos na Matemática!

Professora Isabel Gaspar

[1] Em 1968, o Sveriges Riksbank (Banco Central Sueco) estabeleceu o Prémio das Ciências Económicas em Memória de Alfred Nobel, com base no donativo recebido da Fundação Nobel, nesse ano, por ocasião do tricentenário da criação do banco.

PROBLEMAS EM ABERTO

Para além dos resultados matemáticos notáveis que vão surgindo, existem alguns problemas que permanecem em aberto, sem solução.
No ano 2000, o Instituto Clay de Matemáticas de Massachusetts (EUA) elegeu sete destes problemas e instituiu um prémio de 1 milhão de dólares para a resolução de cada um deles. Estes problemas ficaram conhecidos pelos **problemas do milénio**. Até à data, apenas um deles foi resolvido, em 2003: "A conjetura de Poincaré". No entanto, o matemático russo que o solucionou, Grigori Perelman, prescindiu deste prémio milionário. Por este feito notável, foi-lhe, ainda, atribuída a medalha Fields, que também recusou.

Para saberes mais sobre este assunto, podes consultar:
https://matematicasimplificada.com/problemas-do-milenio/

Apresentamos-te, em seguida, um problema aparentemente muito simples, mas que ainda ninguém conseguiu demonstrar, desde há quase 100 anos...

A CONJETURA (HIPÓTESE) DE COLLATZ

O problema que te apresentamos foi inventado em 1937 pelo matemático alemão Lothar Collatz (1910 – 1990) e tem na sua base apenas duas regras:

Escolha-se um número natural qualquer N (1, 2, 3, ...)

- Se o número N for par, divida-se por 2 —> N/2
- Se o número N for ímpar, multiplique-se por 3 e adicione-se 1 —> 3N + 1

Repita-se o procedimento com o número obtido, e o mesmo com o seguinte, e assim sucessivamente.

A Conjectura de Collatz afirma que, fazendo estas operações, qualquer número termina no 1 e, a partir daí, entra no ciclo 1--> 4 --> 2 -->1.

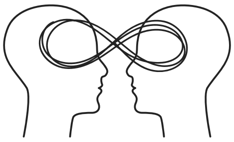
Por exemplo, se utilizarmos o número N = 17, ele evoluirá da seguinte maneira:
17 (ímpar)--> 52 (par) --> 26 (par)-->13--> 40 -->20-->10 -->5--> 16 -->8 -->4-->2 --> **1** --> **4** --> **2** --> **1**...
Chegamos ao número 1, e, daí em diante, os números que se obtêm são 1, 4, 2, 1 para sempre!

<u>**Desafio**</u>: Repete o procedimento com outros números à tua escolha e testa a hipótese de Collatz.

Este é o tipo de problema que se presta a ser estudado por computadores, que nos permitem verificar que a hipótese é verdadeira para números com uma ordem de grandeza já muito considerável. Contudo, esta conjetura poderá ser falsa para algum número superior! Por isso, o problema continua por demonstrar!
Parece fácil, não é? De facto, muitos foram os cientistas que passaram anos, décadas, a tentar resolvê-lo. Inutilmente, até hoje!
Durante a guerra fria, até se dizia que o problema tinha sido inventado pelos soviéticos para atrasar a ciência nos EUA...
Há quem diga que a Matemática ainda não está pronta para solucionar problemas destes!

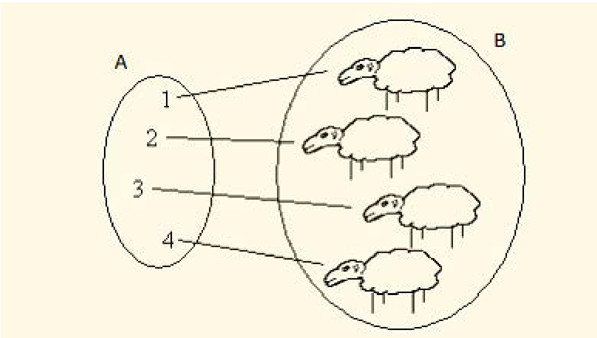
O INFINITO

Vamos repensar o infinito...



O conjunto dos números naturais é infinito. Que outros conjuntos conheces com o mesmo número de elementos do conjunto dos naturais? Pensemos em partes deste conjunto: os números ímpares, os números pares, os múltiplos de 3, os múltiplos de outro número natural, os números primos.... Terão todos o mesmo número de elementos? Vejamos!

Comecemos por perceber como fazemos uma contagem básica. Contamos pelos dedos da mão ou por “associação”:



A e B têm o mesmo número de elementos (4). O seu cardinal é 4.

Recorda que o Cardinal de um conjunto é o número de elementos desse conjunto.

Por este processo, contamos os objetos do nosso dia a dia. Com conjuntos maiores, naturalmente que a nossa abstração dá a ajuda necessária. Mas os conjuntos do nosso dia a dia têm todos um número finito de elementos. Mesmo o número de grãos de areia da praia onde fomos a última vez ou o número de grãos de areia de todas as praias do nosso planeta são em número finito.

No estudo da Matemática, o primeiro conjunto infinito com que contactamos é o dos números naturais, o conjunto IN. Este conjunto diz-se numerável; dizemos que o conjunto dos naturais tem uma infinidade numerável de elementos. Mas existem muitos outros conjuntos numeráveis: o conjunto dos números naturais pares, o dos ímpares, o dos múltiplos de 3 e muitos mais.

Vejamos um problema interessante que te mostra de forma simples que assim é.

Em 1925, o matemático alemão David Hilbert apresentou o seguinte paradoxo:

O HOTEL INFINITO

O Hotel Infinito é um hotel que tem um número infinito de quartos numerados com os números naturais.

E está cheio!

Eis que chegou um novo hóspede! O gerente arranjou uma maneira de o alojar! E até foi rápido. Mas, não estava cheio? Como resolveu o problema?

Logo depois deste, chegou um autocarro com 45 jovens matemáticos e também foram todos alojados. Como?

Para complicar o processo, chegou uma excursão com uma infinidade numerável de elementos. O guia disse: chegou a excursão dos pares. Mais atrás virá a dos ímpares. E outras e muitas mais...

O gerente lá conseguiu acomodar “Os pares“. Como?!

No primeiro caso, o gerente fez uma ligação telefónica para todos os quartos e pediu aos hóspedes que mudassem para o quarto ao lado: o hóspede do quarto 1 passou para o 2, o do 2 para o 3, e assim sucessivamente. E deu o quarto com o número 1 ao novo hóspede, já que esse quarto ficara livre. Simples, hem?

No segundo caso, que é semelhante ao primeiro e a qualquer outro em que o número de novos hóspedes seja um número finito, o gerente mandou avançar esse número de quartos: o hóspede do quarto 1 passou para o 46, o do 2 para o 47, e assim sucessivamente. E deu os primeiros 45 quartos aos excursionistas.

No último caso, esta técnica não funciona porque o hotel tem um número infinito de quartos, logo não é possível avançar “todos” os quartos. Mas o gerente, perspicaz, rapidamente resolveu o problema e acomodou todos os hóspedes. Pediu aos hóspedes que mudassem de quarto da seguinte forma: o hóspede do quarto 1 passou para o quarto 2, o do 2 para o 4, o do 3 para o 6, e assim sucessivamente, cada um deles passou para o quarto com número igual ao dobro do seu. Ficaram livres os quartos 1, 3, 5, ... etc., ou seja, todos os quartos com número ímpar. O gerente deu esses quartos a cada um dos novos hóspedes, acomodando-os a todos.

O hotel continuou cheio, mas com capacidade para muitos mais hóspedes...

O que vemos é que juntando um elemento, quarenta e cinco ou qualquer outro número de elementos ao conjunto IN, ele mantém o número de elementos. Concluímos também que há tantos números pares como números naturais: repara que se estabeleceu uma correspondência biunívoca entre os números naturais e os números pares (os hóspedes que inicialmente preenchiam todos os quartos dos números naturais, passaram a preencher todos os quartos com números pares), o que nos permite concluir que estes dois conjuntos têm o mesmo número de elementos: há tantos números pares como números naturais. Por um raciocínio análogo podemos concluir que qualquer subconjunto infinito de IN tem o mesmo número de elementos de IN.

A parte tem o mesmo número de elementos do todo! Aliás, esta é a característica de qualquer conjunto infinito.

De forma simples se prova, também, que o número de elementos do conjunto dos números inteiros é igual ao número de elementos do conjunto IN. Recorda que o conjunto dos números inteiros é composto pelos inteiros positivos, os inteiros negativos e o 0. Para justificarmos esta afirmação, basta pensar numa “regra” que os faça corresponder, de forma biunívoca, ao conjunto IN. Essa correspondência poderá ser a seguinte, que se apresenta na tabela: aos naturais com o zero fazemos corresponder os números naturais ímpares e aos inteiros negativos, os números naturais pares.

$\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	...	-1	-2	-3	-4	...
$\mathbb{N}$	1	3	5	7	9	...	2	4	6	8	...

De igual modo provamos que a união de dois conjuntos numeráveis ainda é numerável.

De forma já mais elaborada se prova que o conjunto dos racionais também é numerável (ficará para a próxima edição).

O cardinal dos conjuntos numeráveis é $\aleph_0$. Lê-se “alefe zero”.

Mas estes conjuntos são os mais pequenos porque há conjuntos infinitos “maiores”!

$\aleph_0$ **é o menor número (cardinal) infinito**

O conjunto dos números reais tem mais elementos! O seu cardinal é muito maior do que o dos naturais. No entanto, é só o segundo na escala dos números infinitos...

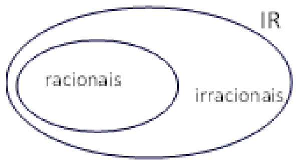
O cardinal de IR é representado por $\aleph_1$ (lê-se " alefe um").

Este número é igual a $2^{\aleph_0}$. Assim, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

Nota: Na teoria de conjuntos, os números Aleph são uma sequência de números usados para representar os cardinais (ou tamanho) de conjuntos infinitos. O símbolo que é usado para os nomear é a primeira letra do alfabeto hebraico aleph (א).

Vejamos, agora, qual é o cardinal do conjunto dos números irracionais.

Uma vez que está contido nos reais, não pode ter maior número de elementos do que este, logo é numerável ou tem o número de elementos de IR.



Ora, numerável não pode ser porque, se assim fosse, a sua união com os racionais seria um conjunto numerável, o que é falso, visto que IR não é numerável.

Concluímos, assim, que o conjunto dos números irracionais tem o mesmo número de elementos do que o conjunto dos números reais.

Há tantos irracionais como reais!

Mais uma curiosidade: prova-se que há tantos números reais no intervalo [0,1], ou noutro intervalo qualquer, como em todo o conjunto IR!

E vamos prosseguir com mais um conjunto infinito: o dos números primos!

OS NÚMEROS PRIMOS SÃO EM NÚMERO INFINITO

Como sabes,

um número primo é um número natural, diferente de 1, que é divisível apenas por 1 e por si próprio.

Podemos desde logo concluir que:

- o único número par que é primo é o 2 (todos os outros números pares são divisíveis por 2);
- para além do 2 e do 3, dois números consecutivos nunca são primos, dado que um deles é par.

Prova-se que **há um número infinito de números primos**, tal como afirmou e provou Euclides (300 a. C). Na sua obra Elementos, Livro 9, Proposição 20, pode ler-se:

> *"Os números primos são mais do que qualquer número grande atribuído aos números primos."*

Façamos uma breve demonstração desta propriedade:

Iniciamos com a constatação de que esta propriedade é verdadeira ou falsa.
comecemos por supor que é falsa, ou seja, que há um número finito de números primos. Designemos, então, o maior número deste conjunto por N. Isto é, N será o maior número primo que existe.
Consideremos o número natural P, que se obtém multiplicando todos os números primos existentes (em número finito, pela nossa hipótese) e adicionando uma unidade a esse valor:

$$P = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times N + 1$$

Continuando o nosso raciocínio, o número P não poderá ser primo, visto ser maior do que N.
Ora, não sendo primo, o número P terá de ser divisível por algum número primo (2, 3, 5, ..., N). Consideremos que P é divisível pelo número primo k .
Consideremos, ainda, o número Q que se obtém multiplicando os N números primos.

$$Q = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times N$$

Este número também é divisível por k, logicamente. E se fizermos a diferença entre P e Q, obtemos um número igualmente divisível por k.
Mas esta diferença, P - Q , é igual a 1, o que nos leva à afirmação de que 1 é divisível por k, e portanto $k=1$.
No entanto, 1 não é um número primo, pelo que chegamos a uma impossibilidade, uma contradição, o que nos permite concluir que P terá de ser primo!
Encontrámos, assim, um número primo maior do que P, o que nos mostra que a nossa suposição inicial, de que existia o maior número primo, é falsa.
Conclusão, a propriedade é verdadeira: há uma infinidade de números primos.

Portanto: **o número de números primos é infinito!**

CURIOSIDADE:

- O maior número primo que se conhece até hoje é 2 elevado a (282 589 933)– 1 e foi descoberto em dezembro de 2018. Este número tem 24 862 048 algarismos.
- Pelo facto de este número ser da forma 2^n-1, diz-se um número de Mersenne.

Falaremos novamente destes números em próximas edições do jornal.

- Historicamente, diz-se que foi o sacerdote e matemático inglês John Wallis (1616-1703) quem usou o símbolo do infinito pela primeira vez na Matemática, em 1655.

+ CURIOSIDADES

1) Multiplicações misteriosas I

- a igualdade 159 x 48 = 7632 utiliza os algarismos 1,2, 3, ... , 9 uma só vez

- 16583742 x 9= 149 253 678 utiliza os algarismos 1,2, 3, ... , 9 uma só vez em cada membro da igualdade.

Consegues encontrar outros produtos com esta propriedade?

2) Multiplicações misteriosas II

Se multiplicarmos **o número 12345679** por qualquer múltiplo de 9, entre 9 e 81, iremos obter um número curioso:

12345679 x **9** =111 111 111 e 9/9 = 1
12345679 x **18** = 222 222 222 e 18/9 = 2
12345679 x **27** = 333 333 333 e 27/9 = 3
...

12345679 x **81** = 999 999 999 e 81/9=9

(Afonso Gaspar, 10E)

3) Tabuada do 9

Uma forma rápida para fazer a tabuada do 9, é seguir os seguintes passos:

1º **passo**: no resultado começar a enumerar de 0-9 verticalmente, de cima para baixo;

2º passo: no resultado enumerar de 0-9, novamente, verticalmente, mas agora de baixo para cima:

9x1= **0**	9x1= **0**9
9x2= **1**	9x2= **1**8
9x3= **2**	9x3= **2**7
9x4= **3**	9x4= **3**6
9x5= **4**	9x5= **4**5
9x6= **5**	9x6= **5**4
9x7= **6**	9x7= **6**3
9x8= **7**	9x8= **7**2
9x9= **8**	9x9= **8**1
9x10= **9**	9x10= **9**0

Outra curiosidade nesta tabuada é que se somarmos os algarismos de cada um dos resultados obtemos sempre 9.

9x1= 9, ou seja, 9

9x2= 18, ou seja, 1+8=9

9x3= 27, ou seja, 2+7=9

....

9x10= 90 , ou seja 9 + 0 = 9

(Érica Carvalho, 10E)

4) Quadrados perfeitos

Sabias que Pitágoras conseguiu arranjar outra regra para calcular os quadrados dos números naturais, ou seja, os quadrados perfeitos, baseando-se na soma de números ímpares?
Exemplos:

O primeiro número ímpar é 1, então $1^2 = 1$

Os primeiros dois números ímpares são 1 e 3,

então $2^2 = 1 + 3$

Os primeiros três números ímpares são 1 , 3 e 5,

então $3^2 = 1 + 3 + 5$

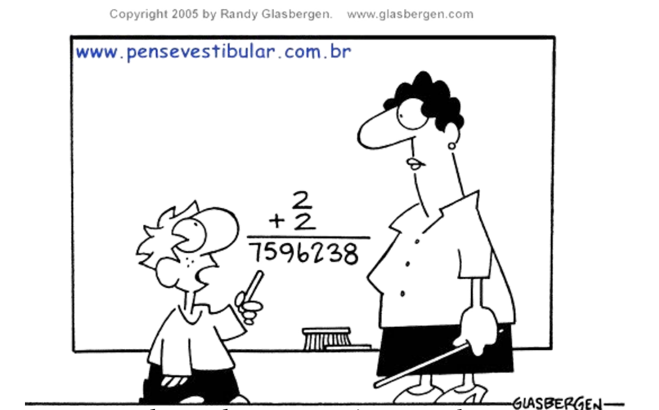
Os primeiros quatro números ímpares são 1 , 3, 5 e 7

então $4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$

Se pretendêssemos, por exemplo, calcular 9^2, faríamos

$9^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$

(Rita Sousa, 10F)



Num mundo cada vez mais complexo, por vezes, velhas questões exigem respostas mais complexas...

+ CURIOSIDADES

5) **Números perfeitos**

Pensa num número! Fatoriza-o e soma os seus divisores, excluindo o próprio número (divisores próprios). Se o valor que obtiveste for igual ao número de que partiste, o número diz-se perfeito.

Por exemplo, os divisores de 28, diferentes de 28, são 1, 2, 4, 7 e 14.
A soma destes números é 28. Logo **28 é um número perfeito.**

O número 10 é divisível por 1, 2 e 5. A soma destes três divisores é 8. Logo 10 não é um número perfeito. Dado que 8 < 10, o número 10 diz-se **defetivo**.

O número 12 é um número **abundante** porque a soma dos seus divisores, diferentes de 12, é maior do que 12. Tem-se $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$.

6) **Números amigos**

Pensa em dois números! Fatoriza-os e soma os seus divisores próprios. Provavelmente não vês nenhuma característica especial. É o usual!
Mas, há casos em que a soma dos divisores de cada um deles é igual ao outro número. Se isto se verificar, os números dizem-se **amigos.**
Por exemplo, **220 e 284 são números amigos** e é o menor par em que esta propriedade se verifica.
Esta descoberta é atribuída a **Pitágoras (cerca de 400 a. C).**
De facto, 220 e 284 são números amigos:

- os divisores de **220**, excluindo 220, são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110.
  A soma deles é igual a **284.**
- os divisores de **284**, excluindo 284, são 1, 2, 4, 71 e 142. A soma deles é **220.**

Durante muito tempo, vários foram os matemáticos que trabalharam esta propriedade. Mas foi apenas em 1636 que o matemático francês Pierre de Fermat descobriu o segundo par de números amigos (17 296 e 18 416). Mais tarde, o francês Descartes (1596- 1650) descobriu outro par: 9 363 584 e 9 437 056, e em 1750, o matemático suiço Leonhard Euler, que adorava brincar com números, encontrou outros 62 pares de números.
No entanto, o segundo par mais pequeno desta lista de números (1 184 e 1 210), passou despercebido a estes ilustres matemáticos. E foi em 1866 que um jovem italiano de 16 anos, Nicolò Paganini, o descobriu!

Desafio: encontra os divisores deste par (1 184 e 1 210) e comprova esta propriedade.

7) **Número de divisores positivos de um número**

Quantos divisores tem o número 220, por exemplo?
Começamos por fatorizar 220 em fatores primos: obtemos $220 = 2^2 \times 5 \times 11$

- Um divisor de 220 será o produto de alguns dos fatores primos deste número: $2^A \times 5^B \times 11^C$
- Num divisor de 220, o fator 2 pode estar ou não: logo A toma valores de 0 (não faz parte) a 2 (no máximo, aparece duas vezes) -> 3 (A+1) possibilidades
- o fator 5 pode não aparecer (B = 0) ou aparecer 1 vez (B = 1) -> 2 (B + 1) possibilidades
- o fator 11 pode não aparecer (C = 0) ou aparecer 1 vez (C = 1) -> 2 (C + 1) possibilidades

Por exemplo, $4 = 2^2 \times 5^0 \times 11^0$ e $10 = 2^1 \times 5^1 \times 11^0$
Assim, o número de divisores, incluindo 1 e 220, é $3 \times 2 \times 2 = 12$

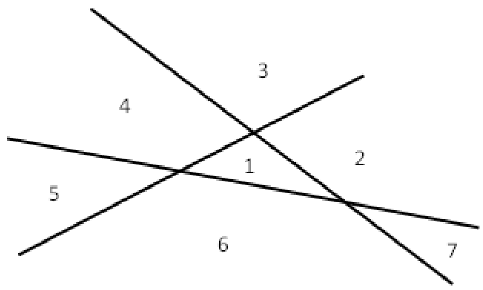
1) **As bodas de rubi**

Na celebração das suas bodas de rubi (40 anos de casados), Guilherme e Rute convidaram toda a família para uma festa. Pensando na sua longa vida juntos, Guilherme recordou como se enamorou da jovem Rute, quando andavam os dois no colégio, havia muitos anos. Contemplando os seus filhos e as suas famílias, questionava-se se voltariam a estar todos juntos no aniversário das bodas de ouro.
Absorto nos seus pensamentos, deu-se conta que a diferença entre o quadrado da sua idade e o quadrado da idade da sua esposa Rute era exatamente igual ao quadrado do número dos seus filhos.
Que idade tinham Guilherme e Rute quando se casaram e quantos filhos tiveram?

(Atividades matemáticas, Brian Bolt)

2) **Em quantas partes dividem o plano várias retas?**

Três linhas retas dividem o plano, no máximo, em 7 regiões, como se pode perceber pela figura ao lado.
Completa a tabela seguinte, escrevendo em cada caso o número máximo de regiões que se podem formar:



Número de retas (n)	0	1	2	3	4	5	6	7
Número de regiões (r)				7				

Continuando a sequência, sem desenhares as linhas, és capaz de dizer quantas regiões se formam no máximo com a) 10 retas, b) 100 retas, c) n retas?

(Atividades matemáticas, Brian Bolt)

3) **Uma moeda a menos**

Temos nove sacos com moedas. O primeiro tem 100 moedas, o segundo tem 200, o terceiro tem 300, e assim sucessivamente até ao último que tem 900 moedas. As moedas são todas iguais e os sacos (vazios) pesam todos o mesmo.
Um brincalhão tirou uma moeda de um dos sacos. Queremos voltar a pô-la no sítio, só que não sabemos qual é o saco e contar todas as moedas dá muito trabalho.
De repente, alguém diz: " É fácil, bastam duas pesagens para descobrir o saco onde falta uma moeda." Como será isto possível?

(José Paulo Viana, Desafios)

Se quiseres enviar a(s) tua(s) resolução(ões), podes utilizar o endereço de email do jornal:

maismatjornal@gmail.com

Serão selecionadas para publicação as melhores resoluções.

<u>**Vê as resoluções de todos os desafios na próxima edição do jornal.**</u>

+Estatística e Ambiente

A desflorestação e a sustentabilidade do Planeta

Porque são tão importantes as florestas?

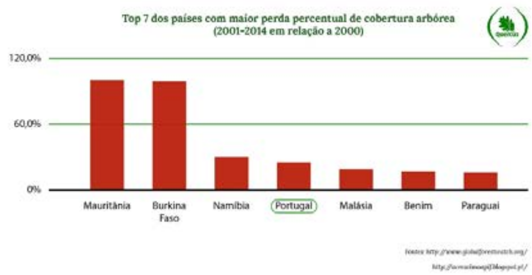
As florestas têm um valor social, económico e ambiental substancial. Ajudam a proteger o solo da erosão, participam no ciclo da água, fornecem um habitat para diferentes espécies, contribuindo assim para a biodiversidade, e ajudam a controlar o clima local. Elas representam 43% da cobertura terrestre da UE e 80% da biodiversidade terrestre encontra-se nas florestas.

As florestas saudáveis também são fundamentais na luta contra as alterações climáticas mundiais, porque capturam dióxido de carbono da atmosfera e libertam oxigénio, contribuindo para que a vida se mantenha – é por isso que lhes chamamos os pulmões do mundo.
As florestas da União Europeia (UE) absorvem anualmente o equivalente a 8,9% do total das emissões de gases com efeito de estufa da UE.

As alterações climáticas e a perda de biodiversidade provocam secas, inundações e incêndios mais intensos que conduzem a uma maior desflorestação e, por conseguinte, ao agravamento das alterações climáticas.

No entanto, temos vindo a assistir à destruição de florestas para que a terra possa ser usada para outros fins (desflorestação), e os dados são alarmantes: entre 1990 e 2020, perderam-se 420 milhões de hectares de floresta devido à deflorestação - o que equivale a uma área do tamanho da UE, de acordo com a Organização das Nações Unidas para Agricultura e Alimentação (FAO).

A exploração madeireira ilegal continua a ser uma das principais causas da deflorestação na UE e em todo o mundo. Um exemplo disso é o que se passa na maior floresta do mundo, a Amazónia. Nas últimas duas décadas, a Amazónia perdeu 8% da sua área florestal, uma área equivalente a Espanha. Só em 2022, a Amazónia brasileira perdeu 10.278 quilómetros quadrados de cobertura vegetal e, infelizmente, esta tendência não parece estar a diminuir.



Já o processo oposto tem lugar na UE, onde as florestas aumentaram 10% entre 1990 e 2020. A exceção é Portugal onde, à custa dos fogos, as florestas primárias estão em risco de desaparecer.
Portugal é o quarto país do mundo com maior desflorestação percentual e é responsável pela desflorestação de cerca de 7.200 metros quadrados por ano.

Existem atualmente 159 milhões de hectares de área florestal na União Europeia, o que representa 43,5% da superfície terrestre da UE. Esta cobertura da área florestal pode variar substancialmente de um Estado-Membro para outro, desde os pouco mais de 10% em Malta aos cerca de 70% na Finlândia.

O que podemos fazer para ajudar a inverter esta tendência?

Temos de mudar hábitos enraizados há muito na nossa sociedade...

https://www.europarl.europa.eu/news/pt/headlines/society/20221019STO44561/as-causas-da-desflorestacao-e-a-resposta-da-ue
https://florestas.pt/conhecer/qual-a-relacao-entre-alteracoes-climaticas-e-florestas/
https://ecoxxi.abae.pt/our_news/portugal-e-o-quarto-pais-do-mundo-com-maior-desflorestacao/

+Notícias

CAMPEONATO NACIONAL DE JOGOS MATEMÁTICOS

No dia 24 de março realizou-se o 16.º Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos. A Escola Secundária do nosso agrupamento participou com os alunos Caterina Fezzi, do 11E, Dinis Santo, do 10E, e Rafael Frade, do 1B, nos jogos Produto, Atari Go e Dominório, respetivamente. O aluno Rafael Frade passou à segunda fase ficando em 8º lugar a nível nacional. Parabéns a todos os alunos, e em especial ao Rafael!

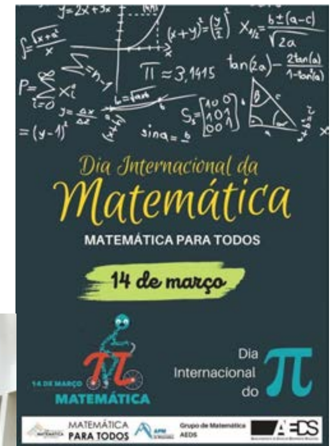
PMATE

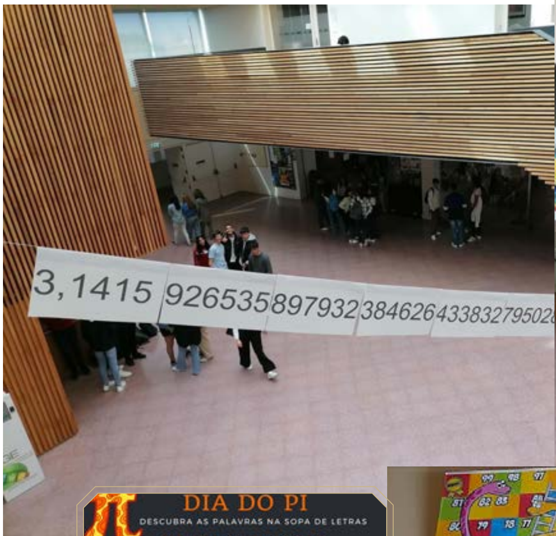
No dia 26 de abril, a ESDS participou no concurso Xeqmat, provas de Matemática inseridas nas Competições Nacionais de Ciência 2023 (PmatE), evento promovido pela Universidade de Aveiro. Os resultados ficaram um pouco aquém das expetativas, no entanto esperamos que a iniciativa sirva de motivação a futuras participações.

DIA DA MATEMÁTICA

No dia 14 de março, celebrou-se o Dia Internacional da Matemática e do Pi. Esta data não ficou esquecida: além da afixação de um cartaz que fizemos para divulgar o dia, decidimos, ainda, engalanar o magnífico átrio da ESDS com alguns algarismos do Pi.

Por essa altura, também aproveitámos para dar a conhecer algumas mulheres que se destacaram na Matemática.





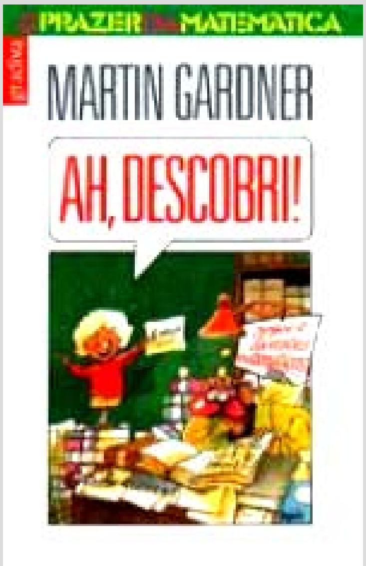
Também na Escola Básica José Saraiva o dia foi assinalado com a realização de algumas atividades mais lúdicas.

+ Sugestões

Quase a finalizar esta edição, deixamos-te algumas sugestões de leituras e de filmes.
Os livros que propomos estão ambos disponíveis na Biblioteca Municipal.
Os dois filmes sugeridos podem ser vistos e requisitados na Biblioteca da ESDS.

Envia-nos os teus comentários.

Livros



Filmes

Por agora, é só!
Mas não terminamos esta edição sem antes apresentarmos as resoluções dos desafios da edição anterior!
Desejando que tenhas gostado, esperamos pela tua colaboração na próxima edição!

+RESOLUÇÕES
CURIOSIDADES NUMÉRICAS

1) "SNEAKY" (Extraído de : "Mathematics in School")

Seja um número qualquer de dois algarismos, *ab*, por exemplo 95. Calcula a diferença positiva entre os quadrados dos seus algarismos. Se neste cálculo o resultado for outro número de dois algarismos, repete-se o processo. Se for um número de um algarismo, para-se.
Quando este último algarismo for zero, então obtenho um "*sneaky*".

- Determina os *sneakies* existentes entre os números 10 e 99 . Resposta: 22
- Qual é o número que demora mais passos a chegar a zero – o mais *sneaky?* Resposta: é o 70 que precisa de 4 etapas.

Passemos à explicação destes resultados.
Nesta resolução, começámos por construir a tabela com os números de 10 a 99, organizada em 9 linhas e 10 colunas. À medida que íamos fazendo os cálculos, fomos assinalando os *sneakys* e os não *sneakys* na tabela. Por simplicidade da sua representação, optámos por os colorir de cores diferentes.
Comecemos por observar que:

- se *a*=*b* , o número é *sneaky* (visto que os quadrados dos algarismos são iguais). Logo, são *sneaky:* 11, 22, ..., 99. , o que nos dá todos os números dessa diagonal.
- se *ab* for *sneaky*, então *ba* também o é. Podemos assinalar esses dois números na tabela.
- nos cálculos que efetuamos, passamos por resultados intermédios. Se o número em análise for *sneaky*, todos esses números intermédios o são, também. Conclusão semelhante se tira, caso o número não seja *sneaky*.

Por exemplo, 15→ 25-1= 24 → 16 - 4 = 12 → 4 - 1=3. Concluímos que 15 não é *sneaky* e também não o são o 24 e o 12. Podemos cortar esses dois números na tabela (bem como o 42 e o 12).

Então basta averiguar a condição para a parte da tabela acima da diagonal (ou a de baixo) e os números da coluna da esquerda: 10, 20, 30, ..., 90:

N	cálculos	Sneaky	Não Sneaky (*)
10	1 – 0 = 1		10
20	4 – 0 = 4		20
30	9 – 0 = 0		30
40	16 – 0=**16** → 36 – 1 =**35** →25 – 9=**16** → 35 → ... (ciclo) (*)		40, 16, 35
50	25-0=25 → 24-4 = 20 (*)		50, 25
60	36 – 0= 36 → 36 -9 =27 → 49 - 4=45 → 25-16=9		36, 27, 45
70	49-0=49 → 81-16=65 →36-25=11 → 0	11, 65, 49, 70, 56, 94	
80	64 -> 36-16=20		80, 64,
90	81 – 0= 81 → 64-1=63 → 36 -9=27 (*)		81, 63
12	4-10=3		12
13	9-1=8		13
14	16-1=15 →25-1=24 → 16 -4 =12 (*)		14, 15, 24
17	49-1 =48 →64-16= 48 → 64-16 =48 ... (ciclo) (*)		17, 48
19	81 – 1= 80 (*)		19
23	9-4 =5		23
26	36 – 4 =32 (*)		26
28	64 – 4 =60 (*)		28
29	81- 4 =77 → 0	29, 92	
34	16 – 9 =7		34
37	49 – 9=40 (*)		37
38	64 – 9 = 55 → 0	38, 83	
39	81 – 9 =72 (*)		39
47	49 – 4 =45 (*)		47
57	49 – 25 = 24 (*)		57
58	64 – 25 = 39 (*)		58
59	81 – 25 = 56 → 36 – 25 →11 → 0	59, 95	
67	49 – 36 = 13 (*)		67
68	64 – 36 = 28 (*)		68
69	81 – 36 = 45 (*)		
78	64 – 49 = 15 (*)		78
79	81 – 49 = 32 (*)		79
89	81 – 64 = 17 (*)		89

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Número Sneaky

Número não Sneaky

+RESOLUÇÕES
Desafios

1) O caracol (Maria do Céu Faria)

1.º dia -> +2-1 = +1 metro; em cada dia avança 1 metro. Logo, no fim do 8.º dia já subiu 8 metros.
No 9.ºdia, ao subir os dois metros, atinge o topo (já não escorrega..)
R: Ao fim de **9 dias** o caracol chega ao cimo do muro

2) Contando conjuntos (OPM - 2023)

A Genoveva quer escolher um conjunto de três números inteiros diferentes, de 1 a 9, cujo produto seja divisível por 4 mas não seja divisível por 8.

- os 3 números não podem ser todos ímpares (o produto seria ímpar)
- os três números não podem ser todos pares (o produto seria divisível por 8)

Há duas situações possíveis:

- 2 números ímpares e um par (o algarismo par terá de ser o 4):

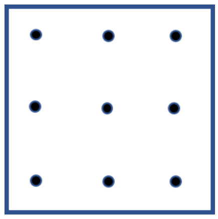
{4, 1, 3} , {4, 1, 5} , {4, 1 , 7} , {4, 1, 9} , {4, 3, 5} , {4, 3, 7} , {4, 3, 9} , {4, 5, 7} , {4, 5, 9} , {4, 7, 9},

- 2 números pares e um ímpar (nenhum dos pares pode ser divisível por 4, logo terão de ser 2 e 6)

{2, 6, 1} , {2, 6, 3} , {2, 6, 5} , {2, 6, 7} , {2, 6, 9}.

R: A Genoveva pode escolher 15 conjuntos.

3) Número de triângulos (adaptado de Atividades matemáticas)



Com os 9 pontos do tabuleiro, podemos fazer **76** triângulos
E se o tabuleiro tiver 4 x 4 = 16 pontos serão **516** = 16C3 - 44
44 = 10 (linhas, colunas e diagonais) x 4 + 4 (diagonais com 3 pontos)
Nota: 16C3=560 é o número de conjuntos de 3 pontos que se podem formar de entre os 16.

4) **Moedas Falsas (I) (José Paulo Viana, Desafios)**

Temos oito moedas rigorosamente iguais na sua aparência exterior. No entanto, uma delas é falsa e **pesa menos** do que as outras sete. **Fazendo apenas duas pesagens** numa balança de pratos, conseguimos descobrir a moeda falsa do seguinte modo:

Pesam-se dois grupos de 3 moedas, deixando duas à parte:

- se os pratos equilibrarem, a moeda falsa está no grupo das duas que não foram pesadas. Pesam-se, então, essas moedas (2ª pesagem), uma em cada prato: a mais leve é a que fica em cima.
- se os pratos não equilibrarem, a moeda mais leve é uma das três que estão no prato que fica em cima. Pesam-se duas delas, uma em cada prato (2ª pesagem) e deixa-se uma de parte; se os pratos equilibrarem, a moeda falsa é a que ficou por pesar; se os pratos não equilibrarem, é a que está no prato que fica em cima.

5) Moedas Falsas (II) (José Paulo Viana, Desafios)

Temos **10 sacos** com 10 moedas cada um. Num dos sacos só há moedas falsas, com 9 gramas cada, e nos outros nove só moedas verdadeiras, que pesam 10 gramas cada. **Apenas com uma pesagem**, podemos descobrir qual é o saco das moedas falsas, pesando o seguinte grupo de moedas:

uma moeda do saco 1, duas moedas do saco 2, três do saco 3, e assim sucessivamente, acabando com 10 moedas do saco 10, num total de **55 moedas.**

Se o saco falso for o 3, por exemplo, o conjunto tem 3 moedas mais leves, pelo que pesará: 550-3=547g.
Assim, o número do saco será dado pela diferença entre 550g e o peso do conjunto das moedas.

6) A Banca Francesa

No jogo de Casino "Banca Francesa" , são lançados três dados cúbicos equilibrados.
Neste jogo, o *croupier* (empregado do Casino) lança 3 dados cúbicos e equilibrados. Cada jogador tem três apostas à escolha:

- a Série Grande (a soma dos dados pode ser 14, 15 ou 16)
- a Série Pequena (a soma dos dados terá de ser 5, 6 ou 7)
- a Série dos Ases (a soma é 3).

Não saindo estes números, a jogada é considerada nula, sendo repetida.

Problema:

Das séries Grande e Pequena, qual terá maior probabilidade de ocorrer? Qual é a probabilidade de cada uma delas?

A Série dos Ases é muito menos provável, daí o prémio ser bastante mais elevado. Ainda assim, a razão das probabilidades será de 61 para 1?

Resolução:

Lançando dois dados, as somas que podemos obter são todos os números inteiros entre 2 e 12. Uma vez que, neste jogo, são lançados 3 dados, temos de pensar na soma destes. Se à soma dos dois primeiros acrescentarmos o valor do 3.º dado, constatamos que, **no caso da Série Grande:**

	2	3	4	5	6
(6,6)	(6, 6, 2)	(6, 6, 3)	(6, 6, 4)		
(6,5)		(6, 5, 3)	(6, 5, 4)	(6, 5, 5)	
(5,6)		(5, 6, 3)	(5, 6, 4)	(5, 6, 5)	
(4, 6)			(4, 6, 4)	(4, 6, 5)	(4, 6, 6)
(5, 5)			(5, 5, 4)	(5, 5, 5)	(5, 5, 6)
(6, 4)			(6, 4, 4)	(6, 4, 5)	(6, 4, 6)
(3, 6)				(3, 6, 5)	(3, 6, 6)
(4, 5)				(4, 5, 5)	(4, 5, 6)
(5, 4)				(5, 4, 5)	(5, 4, 6)
(6, 3)				(6, 3, 5)	(6, 3, 6)
(2, 6)					(2, 6, 6)
(3, 5)					(3, 5, 6)
(4, 4)					(5, 3, 6)
(5,3)					(5, 3, 3)
(6,2)					(6, 2, 6)

Para a soma dos três dados ser 14, a soma dos dois primeiros valores poderá ser:
12 (12+2=14), 11 (11+3=14), 10 (10+4=14), 9 (9+5=14) e 8 (8+6=14)

Para a soma dos três dados ser 15, a soma dos dois primeiros valores poderá ser:
12 (12+3=15), 11 (11+4=15), 10 (10+5=15) e 9 (9+6=15)

Para a soma dos três dados ser 16, a soma dos dois primeiros valores poderá ser:
12 (12+4=16), 11 (11+5=16) e 10 (10+6=16)

Temos **31 situações possíveis** que satisfazem a "Série Grande".
Raciocínio análogo podemos fazer com as somas 5, 6 e 7, o que nos dá, igualmente, 31 situações.
Ora, a Série Ases equivale a obter soma 3, o que acontece apenas **num caso**, (1, 1, 1).
Uma vez que se repete a jogada se não sair nenhuma destas situações, concluímos que existem apenas 63 (31 + 31 + 1) resultados válidos neste jogo, o que se traduz em 63 resultados "possíveis", em cada jogada.
Assim, a probabilidade de ganhar com a série Grande é igual à de ganhar com a Pequena, 31/63, e a probabilidade de ganhar com a série Ases é 1/63. Verificamos, ainda, que a probabilidade de ganhar com as Séries Grande ou Pequena é 31 vezes superior à de ganhar com a Série dos Ases; a probabilidade de ganhar com a Série dos Ases é 62 vezes inferior à de ganhar com as outras duas séries juntas (Grande ou Pequena).

Boas férias.
No próximo ano letivo estaremos de volta!